

Algèbre linéaire

Examen

Partie commune

Automne 2021

Énoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

- Pour une matrice A , a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
- Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i -ème coordonnée de $\vec{x}$.
- I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
- $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.
- Pour $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire est défini par $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-2, -4)$, $(0, 0)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(4, -1)$ est

☐ $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x.$

☐ $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x.$

☐ $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x.$

☐ $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x.$

Question 2 : L'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

est telle que

☐ $b_{32} = -2.$

☐ $b_{32} = 2.$

☐ $b_{32} = 1.$

☐ $b_{32} = -1.$

Question 3 : Soit A une matrice symétrique telle que

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de A associés, respectivement, aux trois valeurs propres -5 , 5 et 2 . Alors

☐ $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

☐ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

☐ $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

☐ $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$

Question 4 : Soit a un paramètre réel. Le système

$$\begin{cases} x + & ay + 3z = 0 \\ & y - 2z = 3 \\ -x + & 4y + 4z = a \\ & (a+6)y + 3z = a^2 \end{cases}$$

☐ admet au moins une solution si et seulement si $a \in \{-2, 3\}$.

☐ admet une infinité de solutions si et seulement si $a = -2$.

☐ n'admet pas de solution si et seulement si $a \in \{-2, 3\}$.

☐ admet une unique solution si et seulement si $a = 3$.

Question 5 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

☐ $\det(A) = 6$. ☐ $\det(A) = -24$. ☐ $\det(A) = 0$. ☐ $\det(A) = 48$.

Question 6 : Soit R la forme échelonnée réduite de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alors on a

☐ $r_{13} = -4$. ☐ $r_{13} = 0$. ☐ $r_{13} = -2$. ☐ $r_{13} = -3$.

Question 7 : Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ T est injective et surjective.
☐ T est injective mais n'est pas surjective.
☐ T est surjective mais n'est pas injective.
☐ T n'est ni injective ni surjective.

Question 8 : Soient $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = (1 + t^2, 2 - t^3, t, 1 - t^2)$ une base ordonnée de $\mathbb{P}_3$. Soit $T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \\ 2a + c \\ 2b + d \end{pmatrix}.$$

Soit $A = [T]_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$ la matrice de T relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_3$ et la base $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^4$, telle que $[T(p)]_{\mathcal{E}} = A[p]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_3$. Alors on a

☐ $a_{34} = -1$. ☐ $a_{34} = 2$. ☐ $a_{34} = -2$. ☐ $a_{34} = 1$.

Question 9 : Soient

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

deux bases ordonnées de $\mathbb{R}^3$. Alors la matrice de changement de coordonnées $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, est

☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Question 10 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Une solution $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ du système $A\vec{x} = \vec{b}$ a pour première composante

☐ $x_1 = -1.$

☐ $x_1 = 5.$

☐ $x_1 = 4.$

☐ $x_1 = -2.$

Question 11 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors la solution au sens des moindres carrés $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

☐ $\hat{x}_1 = -3.$

☐ $\hat{x}_1 = -6.$

☐ $\hat{x}_1 = 6.$

☐ $\hat{x}_1 = 3.$

Question 12 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des valeurs propres réelles de A est

☐ $\{0\}.$

☐ $\{-1, 0\}.$

☐ $\{0, 1\}.$

☐ $\{-1, 1\}.$

Question 13 : L'algorithme de Gram-Schmidt appliqué aux colonnes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

fournit une base orthogonale de $\text{Im}(A)$ donnée par les vecteurs

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}.$

Question 14 : La projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sur le sous-espace vectoriel engendré par la

première et la deuxième colonne de la matrice A de la Question 13 est le vecteur

☐ $\begin{pmatrix} 21 \\ -15 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 39 \\ -9 \\ 15 \\ 12 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Question 15 : La matrice A de la Question 13 possède une décomposition QR telle que

☐ $r_{33} = 3\sqrt{2}.$

☐ $r_{33} = 2\sqrt{3}.$

☐ $r_{33} = \sqrt{3}.$

☐ $r_{33} = \sqrt{2}.$

Question 16 : Soient

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

et $W = \text{Vect}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\} \subset \mathbb{R}^4$. Alors une base du complément orthogonal $W^\perp$ est donnée par les vecteurs

$$\square \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 17 : Si $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ est une famille de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel V et si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont des nombres réels arbitraires, alors $\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \dots, \alpha_k v_k\}$ est aussi une famille de vecteurs linéairement indépendants de V .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 18 : Les polynômes

$$p_1(t) = t^2, \quad p_2(t) = t^2 + t^3, \quad p_3(t) = t - t^3, \quad p_4(t) = 1 + t^3$$

forment une base de $\mathbb{P}_3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 19 : Si A est une matrice de taille 3×3 avec valeurs propres 1, 2 et 4, alors $\det(A) = 8$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$, alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -11 & 11 \\ 11 & 11 & -11 \\ -11 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

est orthogonalement diagonalisable.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit A une matrice de taille 6×6 . Si le polynôme caractéristique de A est $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2 \lambda^4$, alors l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ est toujours de dimension 2.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit V un espace vectoriel tel que $\dim V = n$. Si S est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants de V , alors S est une base de V .

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit A une matrice de taille 9×5 . Si $\dim(\text{Ker}(A)) = 5$, alors $\dim(\text{Im}(A)) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sachant que R est la forme échelonnée réduite de la matrice A , alors les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\text{Ker}(A)$.

☐ VRAI

☐ FAUX

Question 26 : Soit A la matrice de la Question 25. Alors les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\text{Im}(A)$.

☐ VRAI

☐ FAUX

Question 27 : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

☐ VRAI

☐ FAUX

Question 28 : Soit $\mathcal{B}$ la base ordonnée de $\mathbb{P}_2$ donnée par $\mathcal{B} = (1, 1+t, 1+t^2)$ et soit $p \in \mathbb{P}_2$ défini par $p(t) = 3 + 4t + 5t^2$. Alors la première coordonnée de p par rapport à la base $\mathcal{B}$ est -6 .

☐ VRAI

☐ FAUX

Question 29 : Si A est une matrice de taille $n \times n$, alors $\det(A^T) = -\det(A)$.

☐ VRAI

☐ FAUX

Question 30 : L'ensemble $\{p \in \mathbb{P}_4 : p(t) = at^4 \text{ pour un certain } a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_4$.

☐ VRAI

☐ FAUX

Question 31 : Soient

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est l'élément de $W = \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ le plus proche de $\vec{y}$.

☐ VRAI

☐ FAUX

Question 32 : Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Si $\dim W < \dim V$, alors T n'est pas injective.

☐ VRAI

☐ FAUX